

Médian MT3F

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. EN PARTICULIER ET SAUF MENTION CONTRAIRE, LES RÉSULTATS NON JUSTIFIÉS NE SERONT PAS PRIS EN COMPTE.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2 et soit

$$\begin{array}{ccc} f : & E & \rightarrow E \\ & P(X) & \mapsto P(1-X) \end{array}$$

1. Démontrer que la matrice A de f relativement à la base canonique s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Démontrer que f est une symétrie vectorielle.
3. D'après le cours, f est une symétrie par rapport à F parallèlement à G : préciser ce que sont F et G .
4. Donner une base de F .
5. Donner une base de G .
6. On note $\mathcal{B}$ la base constituée de la juxtaposition des bases de F et de G données précédemment. Préciser la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Exercice 2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

1. Démontrer que I_n est une intégrale convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer I_1 .
3. En écrivant $1 = 1 + x^2 - x^2$ dans le numérateur de I_n , vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = I_n - K_n,$$

où :

$$K_n = \int_0^\infty x \times \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx.$$

On ne demande pas de vérifier que K_n est convergente.

4. À l'aide d'une intégration par parties dans l'expression de K_n donnée ci-dessus, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n = \frac{1}{2n} I_n.$$

5. En déduire une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n (on ne demande pas de déterminer I_n en fonction de n).

Correction 1.

1. On note $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$. Alors :

$$f(P_0)(X) = P_0(1-X) = 1$$

$$f(P_1)(X) = P_1(1-X) = 1-X$$

$$f(P_2)(X) = P_2(1-X) = (1-X)^2 = 1-2X+X^2$$

D'où la matrice A donnée dans l'énoncé.

2. On vérifie facilement que $A^2 = I_3$. Ainsi, $f \circ f = \text{id}$ et f est une symétrie vectorielle.

3. f est une symétrie vectorielle par rapport à $F = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $G = \text{Ker}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$
4. Soit $P = x + yX + zX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff f(P) = P \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = x \\ -y - 2z = y \\ z = z \end{cases} \\ &\iff y = -z \end{aligned}$$

D'où une base de F : $(1, -X + X^2)$.

5. Avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned} P \in G &\iff \begin{cases} x + y + z = -x \\ -y - 2z = -y \\ z = -z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, une base de G est : $(1 - 2X)$.

6. Les vecteurs de F sont laissés invariants par la symétrie. Ceux de G sont multipliés par -1 . Ainsi, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction 2.

1. Les intégrales I_n sont ordinaires en 0. En $+\infty$, on peut utiliser un critère d'équivalence en remarquant que :

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \sim \frac{1}{x^{2n}}$$

et en citant le cours sur les intégrales de Riemann.

2. Le calcul de I_1 est classique et a déjà été vu en TD plusieurs fois. On trouve $I_1 = \pi/2$.
3. Puisque l'énoncé ne demande pas de vérifier que K_n est convergente, il suffit d'appliquer la linéarité de l'intégrale avec l'astuce de calcul qui est donnée.
4. On pose pour $A > 0$:

$$K_{n,A} = \int_0^A x \times \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx.$$

Pour l'intégration par parties, on définit les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ suivantes :

$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} & v(x) = \frac{-1}{2n}(1+x^2)^{-n} \end{cases}$$

D'où :

$$K_{n,A} = \left[-\frac{x}{2n(1+x^2)^n} \right]_0^A + \frac{1}{2n} \int_0^A \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Il reste à passer à la limite lorsque $A \rightarrow \infty$ dans l'égalité ci-dessus pour trouver l'égalité donnée dans l'énoncé.

5. On trouve la relation de récurrence suivante :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2n} I_n = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

On pourrait alors démontrer la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{2n-1}(n-1)!n!}{(2n)!}$$